TRANSFORMÉES DE LAPLACE

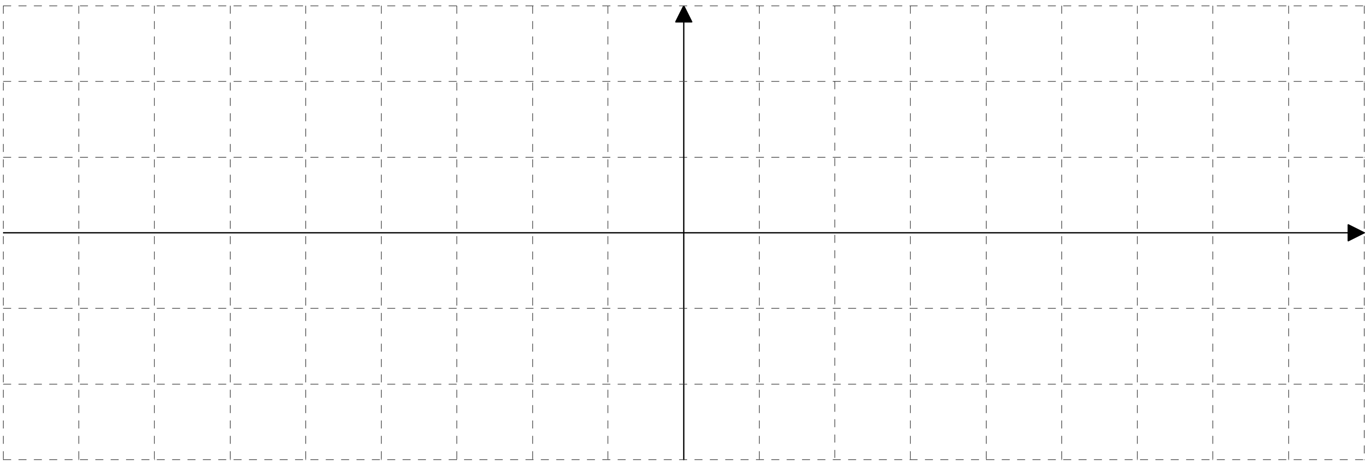
I - Les fonctions causales

I-1 Définition : Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite Causale si $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

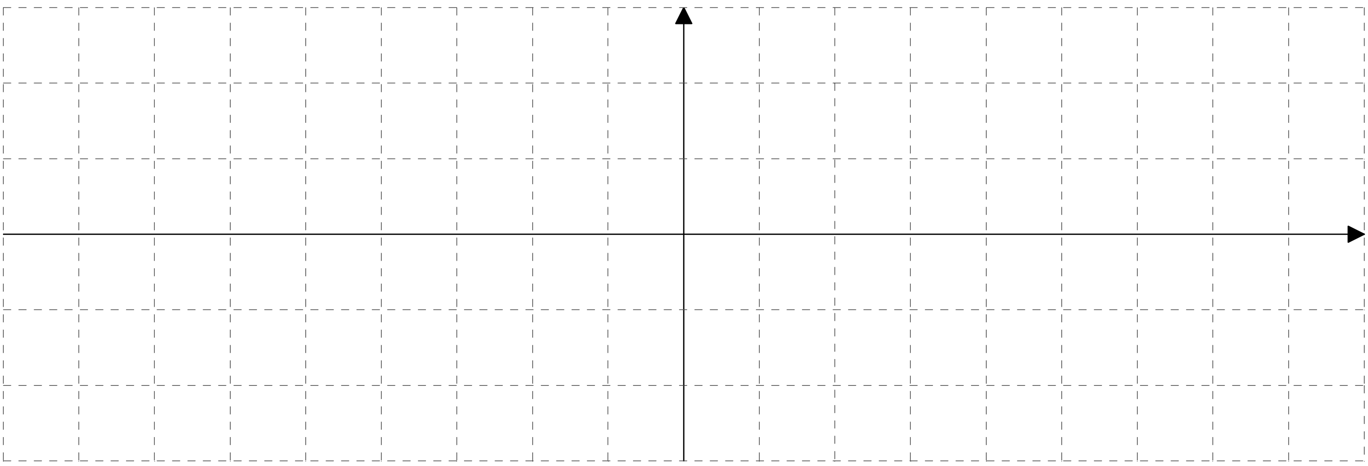
- La **fonction causale** la plus utilisée est la fonction **"échelon-unité"** notée U définie par

$$U(t) = 0 \quad si \quad t < 0$$
$$U(t) = 1 \quad si \quad t \geqslant 0$$

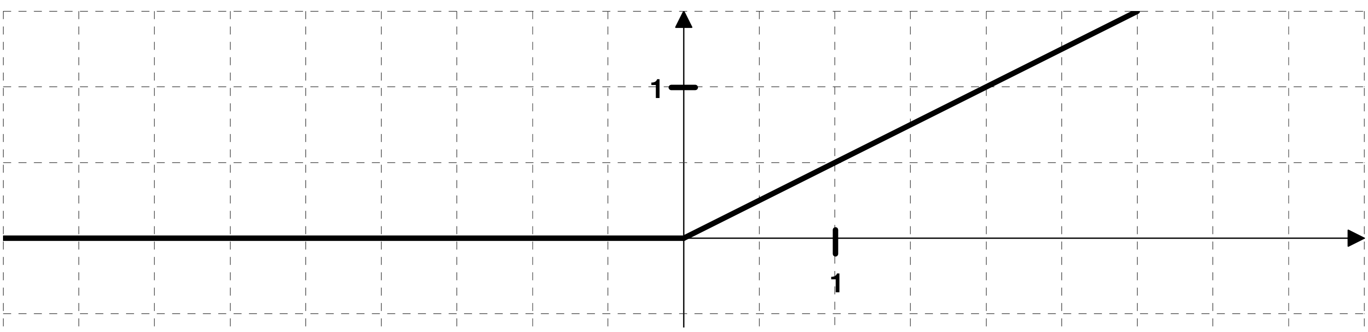
Ex1 - Tracer la représentation graphique de la fonction échelon-unité :



Ex2 - Tracer la représentation graphique de la fonction $f(t) = \sin(t) \times U(t)$



Ex 3 - Quelle est l'expression de la fonction dont le graphe est le suivant :

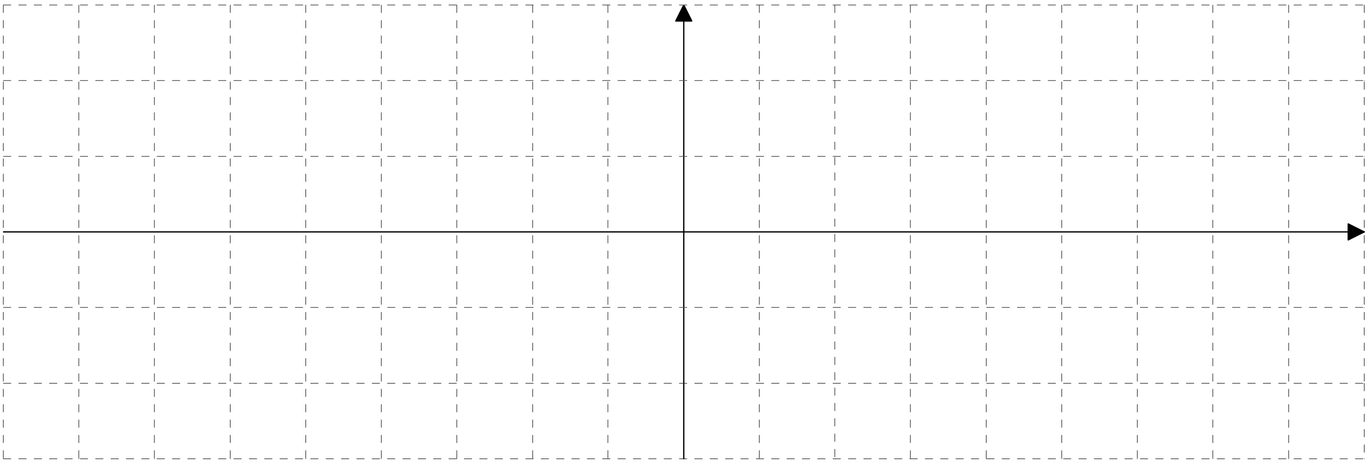


I-2 Fonctions retardées.

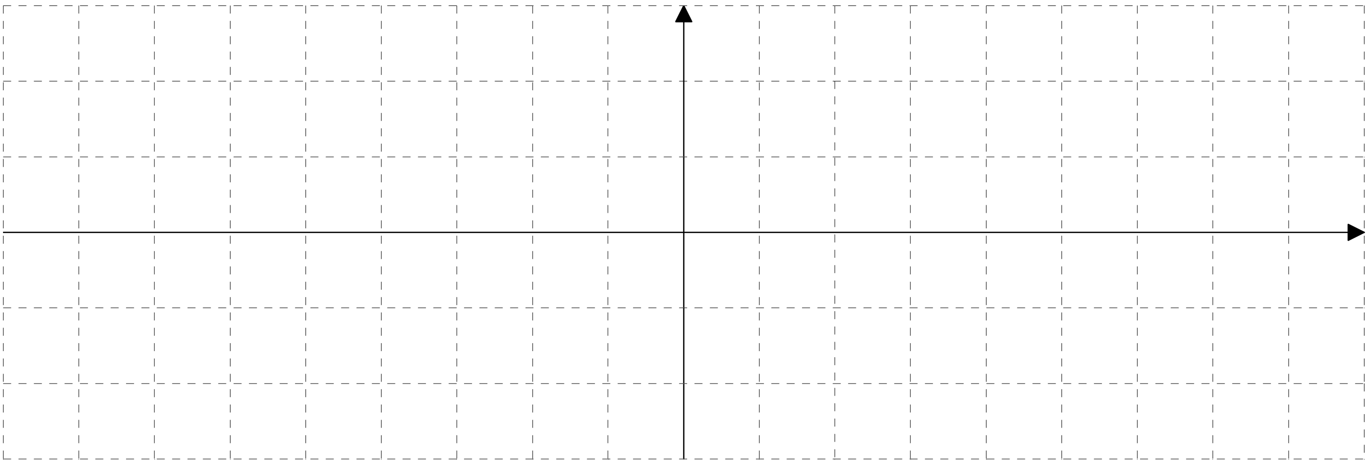
Soit le réel $a > 0$. Etudions la fonction $t ----> U(t-a)$

D'après la définition $\begin{cases} U(t-a) = 0 \;\; si \; t-a < 0 \;\; donc \;\; si \;\; t < a \\ U(t-a) = 1 \;\; si \;\; t-a \geqslant 0 \;\; donc \;\; si \;\; t \geqslant a \end{cases}$

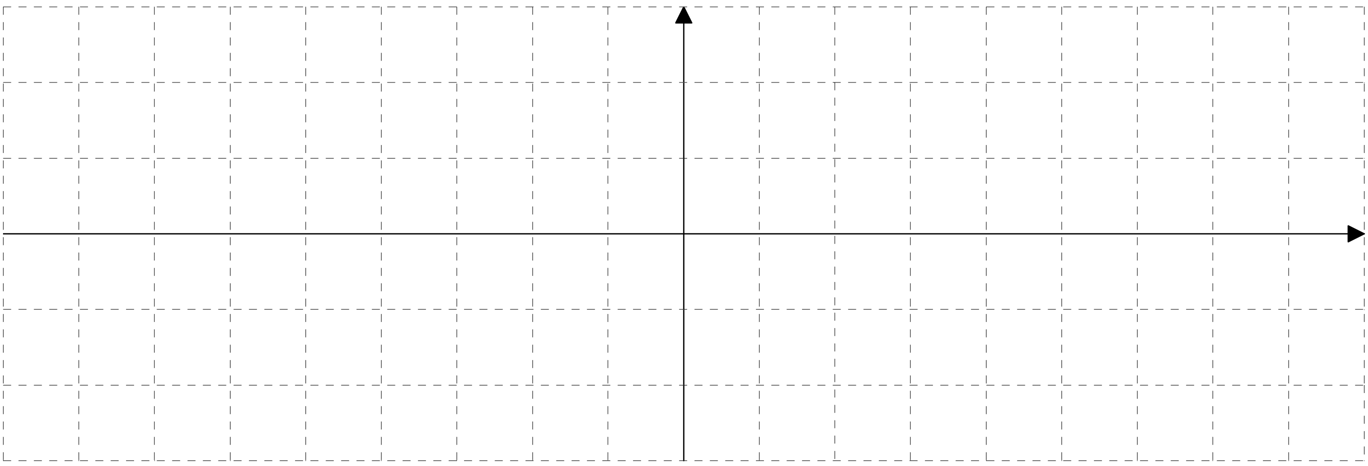
Ex4 - Tracer la représentation graphique de la fonction $f(t) = U(t-a)$



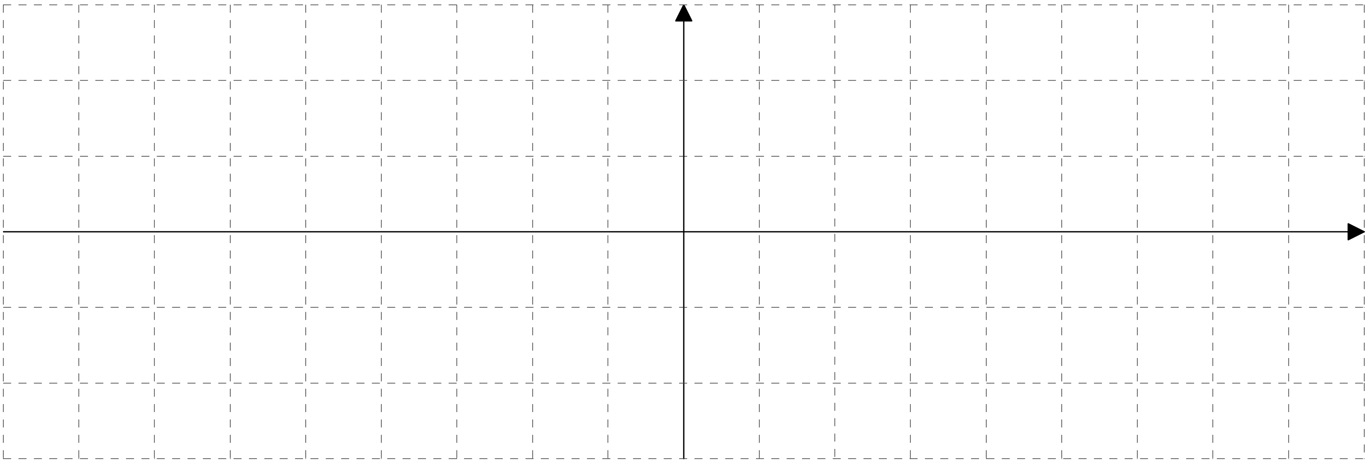
Ex5 - Tracer la représentation graphique de la fonction $g(t) = \cos(t) \times U(t-\pi)$



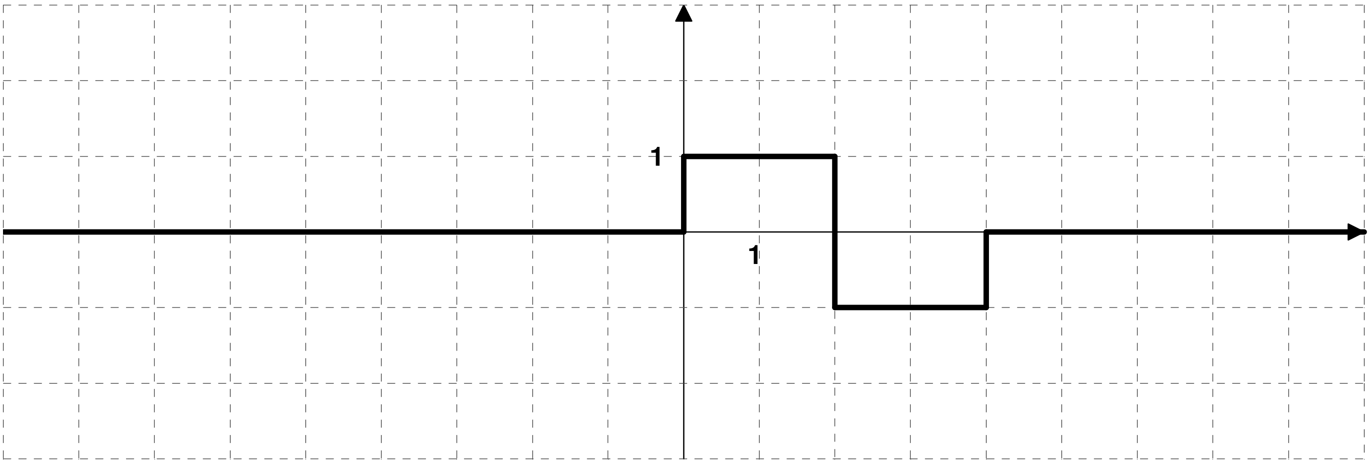
Ex6 - Tracer la représentation graphique de la fonction $h(t) = U(t) + U(t-1)$



Ex 6 - Tracer la représentation graphique de $k(t) = U(t) + U(t-3) - 4U(t-4)$



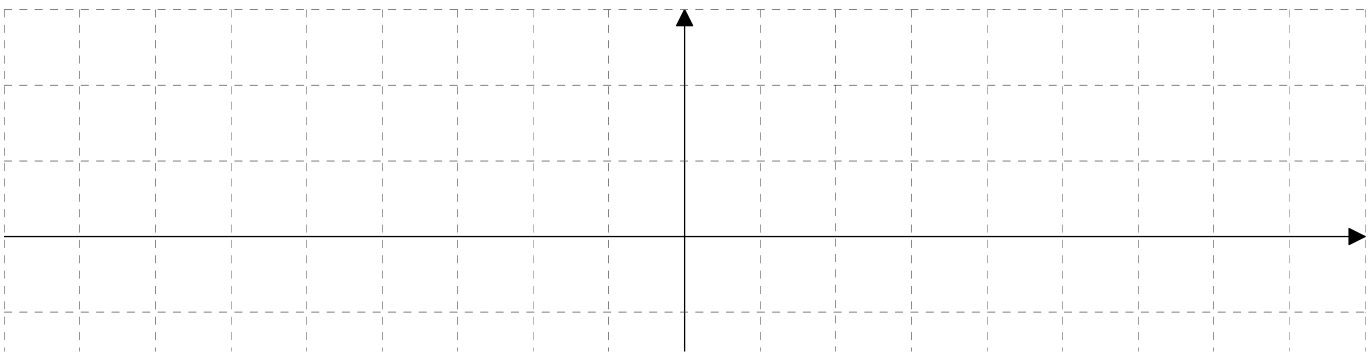
Ex 7 - Donner l'expression de la fonction dont le graphe est :



Ex 8 - - Tracer le graphe de $f(t) = tU(t) - 2(t-\pi)U(t-\pi) + (t-2\pi)U(t-2\pi)$

On pourra remplir le tableau suivant au préalable :

	$-\infty$	0	π	2π	$+\infty$
$tU(t)$					
$-2(t-\pi)U(t-\pi)$					
$+(t-2\pi)U(t-2\pi)$					
$f(t)$					



II - Intégrales généralisées (ou Impropres)

II - 1 Définition :

- Si f est une fonction définie et dérivable sur $[a,+\infty[$ et si $\lim\limits_{x \to \infty} \int_a^x f(t)\, dt$ est un réel A , on dit que l'intégrale $\int_a^\infty f(t)\, dt$ **converge** et on a $\int_a^\infty f(t)\, dt = A$
- Si une intégrale ne converge pas, on dit qu'elle **diverge.**

NB : ***Etudier la convergence*** d'une integrale consiste à déterminer $\lim\limits_{x \to \infty} \int_a^x f(t)\, dt$. Si cette limite est un **réel fini**, on dira que l'intégrale converge.

II - 2 Exemples.

Étudions la convergence de I = $\int_0^\infty \mathbf{e}^{(-t)}\, dt$ puis de J = $\int_1^\infty \frac{1}{t} dt$

Solutions :

III - Transformée de Laplace d'une fonction Causale

III-1 Définition : soit f une fonction causale, on appelle transformée de Laplace de f, la fonction F de la variable réelle p définie par :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{(-p\,t)}\, dt$$

Autre notation : on note aussi $F(p) = \mathcal{L}_f(p)$ ou encore $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$

III-2 Transformation des fonctions usuelles

- ***Fonction échelon-unité***

$$\mathcal{L}(U(t)) = \int_0^{\infty} e^{(-p\,t)}\, dt$$

- ***Fonctions puissance t -> t^n*** ($n \in \mathbb{N}^*$)

Cas où $n = 1$ *A l'aide d'une IPP, montrer que* $\mathcal{L}(tU(t)) = \displaystyle\int_0^{\infty} t\, e^{(-pt)}\, dt = \frac{1}{p^2}$

Cas où $n = 2$ *A l'aide d'une IPP, montrer que* $\mathcal{L}(t^2U(t)) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^2\, e^{(-pt)}\, dt = \frac{2}{p^3}$

III - 3 Formulaire : on admettra les résultats suivants

$$\mathcal{L}[\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p} \; ; \; \mathcal{L}[t\,\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p^2} \; ; \; \mathcal{L}[t^n\,\mathcal{U}(t)] = \frac{n!}{p^{n+1}},\ n \in \mathbb{N}^* \; ;$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}\,\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p+a},\ a \in \mathbb{N}^*$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)\,\mathcal{U}(t)] = \frac{p}{p^2+\omega^2} \; ; \qquad \mathcal{L}[\sin(\omega t)\,\mathcal{U}(t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

☞ ***Exercices 7 et 8 a) - Fiche Laplace*** ==

IV - Propriétés de la transformée de Laplace

IV-1 Linéarité : si α et β sont deux réels $\mathcal{L}(\alpha \times f + \beta \times g) = \alpha \times \mathcal{L}(f) + \beta \times \mathcal{L}(g)$

Preuve évidente obtenue grâce à la linéarité des intégrales.

Ex 9 : calculer $\mathcal{L}((2\sin 3t + \cos 2t)U(t))$

IV-2 Transformée de $f(at)U(t)$ pour $a \neq 0$ **:** $\mathcal{L}(f(at)U(t)) = \frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$

Ex 10 : grâce au changement de variable $u = at$, *établir la propriété précédente.*

IV - 3 Transformée de $f(t) \times e^{-at} \times U(t)$: $\mathcal{L}(f(t)e^{-at}U(t)) = F(p+a)$

Démonstration facile ...

IV - 3 Transformée de $f'(t) \times U(t)$: $\mathcal{L}(f'(t)U(t)) = pF(p) - f(0^+)$

Ex 11 - en intégrant par partie, (on pose $u'(t) = f'(t)$ et $v(t) = e^{-pt}$*), démontrer le résultat précédent.*

NB : on admettra que $\lim_{x \to \infty} \left(f(x)\, \mathbf{e}^{(-p\,x)} \right) = 0$

IV - 4 Transformée de $f''(t) \times U(t)$: $\mathcal{L}(f''(t)U(t)) = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$

Démonstration : facile en utilisant IV - 3

Exercice 12 : On considère l'équation différentielle suivante, la fonction s recherchée étant une fonction causale :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0}\frac{d^2s}{dt^2}(t) + 2\frac{m}{\omega_0}\frac{ds}{dt}(t) + s(t) = U(t) \\ s(0) = 0 \\ \frac{ds}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$ avec ω_0 et m réels strictement positifs

Transformer les deux membres de cette équation différentielle, en déduire l'expression de la transformée de Laplace S(p)

IV - 5 Transformée de $\int_0^t f(u)\,du\,U(t)$: $\mathscr{L}\left(\int_0^t f(u)\,du\,U(t)\right) = \frac{F(p)}{p}$

Résultat admis

IV - 6 Transformée de $f(t-\tau)U(t-\tau)$: $\mathscr{L}(f(t-\tau)U(t-\tau)) = F(p)e^{-\tau p}$

NB : cette propriété est connu sous le nom de ***Théorème du Retard***

Ex 13 - en effectuant le changement de variable $u = t - \tau$, démontrer le résultat précédent.

Ex 14 - déterminer la transformée de Laplace de $\sin(3t-\frac{\pi}{2})U(t-\frac{\pi}{6})$

(Réponse : $F(p) = \frac{3}{p^2+9}\, e^{-\frac{\pi}{6} p}$ *)*

IV - 7 Dérivée d'une transformée de Laplace

Nous admettrons que *Si f a pour transformée F, alors* $\mathcal{L}(-tf(t)U(t)) = F'(p)$

Ex 15 : déterminer la transformée de Laplace de $-t\sin 3tU(t)$

IV - 8 Tableau récapitualtif des propriétés des transformées de Laplace

$$f(t)\,\mathcal{U}(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(p)$$

$f(at)\,\mathcal{U}(t),\ a > 0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
$e^{-at} f(t)\,\mathcal{U}(t)$	$F(p + a)$
$f'(t)\,\mathcal{U}(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f''(t)\,\mathcal{U}(t)$	$p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$
$-t\, f(t)\,\mathcal{U}(t)$	$F'(t)$
$\int_0^t f(u)\,\mathcal{U}(u)\,du$	$\frac{F(p)}{p}$
$\frac{f(t)}{t}\mathcal{U}(t)$	$\int_p^{+\infty} F(u)\,du$
$\int_0^t f(u)g(t-u)\,\mathcal{U}(u)\,du$	$F(p)G(p)$

► Théorème du retard

Pour $t \geq a$, si $\phi(t) = f(t - a)\,\mathcal{U}(t - a)$ alors $\mathcal{L}[\phi(t)] = e^{-a\,p}\,\mathcal{L}[f(t)] = e^{-ap}\,F(p)$.

IV - 9 Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

Nous admettrons :

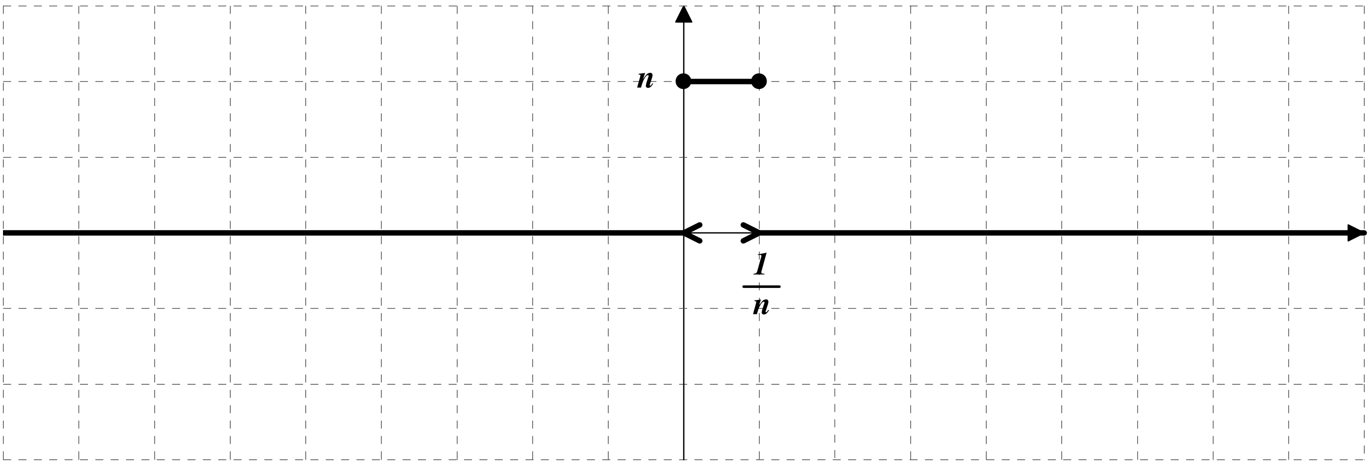
Théorème de la valeur initiale : $\lim_{p\to+\infty} pF(p) = f(0^+)$ si la limite est finie

Théorème de la valeur finale : $\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$ si les limites existent.

V - Notion d'impulsion unité

On considère la suite de fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = n \;\; si \;\; t \in [0; \tfrac{1}{n}]$$
$$f_n(t) = 0 \;\; si \;\; t \notin [0; \tfrac{1}{n}]$$



Lorsque n tend vers l'infini, on obtient "l'impulsion unité". Il s'agit d'une fonction ayant une image "très grande" sur une variation d'abscisse "très faible".

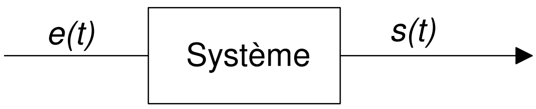
On note δ cette limite, δ est appelée l'impulsion unité ou impulsion de Dirac

- **Transformée de Laplace de δ**

  Nous admettrons enfin que $\mathscr{L}(\delta(t)) = 1$

VI - Systéme "entrée-sortie" ; fonction de transfert

On considère un système "entrée-sortie"



Par exemple dans un circuit électrique avec géné n aux bornes du générateur et le signal *s(t)* de sortie peut être l'intensité du courant.

Les fonctions s et e sont des fonctions de la variable réelle t, causales et admettant des transformées de Laplace respectivement *S(p)* et *E(p)*

On définit la **fonction de transfert** $p \to H(p)$ du système par $S(p) = H(p) \times E(p)$

VI - TP - Recherche d'originaux

La technique consistant à retrouver la fonction f connaissant sa transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ s'appelle la recherche de l'original de $\mathcal{L}(f)$.

- ***Si une fonction causale f admet F comme transformée de Laplace, on dit que f est l'original de F***
- ***Si une fonction F admet un original, celui-ci est unique, on le note parfois $\mathcal{L}^{-1}(F) = f$***

La technique consiste à écrire $F(p)$ de façon à retrouver une expression remarquable donnée par les formulaires des chapitres III-3 et IV-8.

Exemple : soit $F(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)}$. Trouver l'original de F.

Corrigé :

$\frac{2}{(p+1)(p+2)}$ peut se décomposer sous la forme $\frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+1} = \frac{(a+b)p+2a+b}{(p+1)(p+2)}$

En identifiant avec l'expression de $F(p)$, on établit le système : $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$

D'où $F(p) = \frac{2}{(p+1)} - \frac{2}{(p+2)}$

Enfin, si on note f son original, les formulaires donnent $f(t) = 2e^{-t}U(t) - 2e^{-2t}U(t)$.

Ex 16 - on donne $F(p) = \frac{p+1}{(p^2+2)(p+2)}$

1. *Écrire* $F(p)$ sous la forme $\frac{ap+b}{p^2+2} + \frac{c}{p+2}$ et calculer les valeurs de a, b et c
2. *En déduire l'expression de f(t), original de F*

Exercices 13 à 16 - Fiche Laplace ==

VII - TP - Résolution d'équations différentielles

Exercice type : *il s'agit de résoudre l'équation différentielle* $\frac{1}{2}i''(t)+i'(t)+i(t)=(t+1)U(t)$
Où i est une fonction causale vérifiant $i(0^+) = 1$ et $i'(0^+) = 0$

1. *Déterminer la transformée de Laplace de la fonction t* $\rightarrow (t+1)U(t)$
2. *Exprimer , à l'aide de la transformée de Laplace I de i, la transformée de Laplace de la fonction* $t \rightarrow \frac{1}{2}i''(t)+i'(t)+i(t)$
3. *En déduire I(p) en fonction de p.*
4. *Montrer que, pour p >* 0*, I(p) peut s'écrire sous la forme* $I(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{p+1}{p^2+2p+2}$
5. *Déduire de ce qui précède l'expression de i(t) en fonction de t.*

Solution :

VIII - TP - Résolution d'un système différentiel

Exercice type : *on considère le système différentiel :* $\begin{cases} x'(t) = 3x + 2y \\ y'(t) = x + 2y \end{cases}$

Avec les conditions initiales $x(0) = 3$ *et* $y(0) = 0$.

Les fonctions x et y solutions de ce système sur $[0;+\infty[$ *sont prolongées par la fonction nulle sur* $]-\infty;0[$, *elles deviennent ainsi des fonctions causalesque l'on note toujours x et y. On suppose que ces fonctions admettent des transformées de Laplace X et Y.*

1. *Calculer X(p) et Y(p) (transformer chaque ligne du système différentiel par Laplace, puis résoudre le système)*
2. *En déduire x(t) et y(t)*

Solution :

Exercices 17 à 19 - Fiche Laplace ==