Fonctions continues et applications

Exercice 1 On considère une fonction *f* ayant le tableau de variations suivant

x	- 5 7		- 1		2	
$f(x)$	4 1	↘	- 2	↗	5	↘

1) Tracer une courbe représentative d'une fonction *f* ayant un tel tableau de variations.

2) Donner le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$.

3) Discuter, suivant les valeurs du réel *m*, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 2 La fonction *f* est définie par $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{3}{x+2}$ sur **R** \ { - 2 }

C est la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) A l'aide de la calculatrice graphique tracer l'allure de *C*. Ce tracé est il « continu » ?

2) Déterminer graphiquement si *C* admet des éléments de symétrie (axes ou centres).

3) Démontrer les résultats conjecturés à la question 2).

Exercice 3 1) *P* est la fonction polynôme définie sur ℝ par $P(x) = -2x^3 - 3x^2 - 1$

a) Etudier les variations de la fonction *P* sur ℝ.

b) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur ℝ.

c) Déterminer une valeur approchée au dixième près de x_0.

d) Dresser le tableau de signe de $P(x)$ sur ℝ.

2) *f* est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3 - 1}$ pour tout réel $x \neq 1$.

On désigne par *C* sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer la fonction dérivée de *f* et montrer que, pour tout *x* différent de 1 on a :
$f'(x) = \dfrac{P(x)}{(x^3 - 1)^2}$ où *P* est le polynôme défini à la question 1).

b) En déduire le sens de variation de la fonction *f* sur les intervalles où elle est définie.

c) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe *C* au point d'abscisse 0.

d) Etudier la position relative de la courbe *C* par rapport à la droite T.

Exercice 4 f est la fonction définie sur $[-\pi ; \pi]$ par $f(x) = \sin x + x^2$

1) Calculer la dérivée f' de f sur $[-\pi ; \pi]$.

2) Etudier le sens de variation de la fonction f' sur $[-\pi ; \pi]$.

3) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur $[-\pi ; \pi]$.

4) Déterminer une valeur approchée au dixième près de x_0.

5) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-\pi ; \pi]$.

Exercice 6 Le 1° janvier 2002, René a placé 5000 euros à intérêts composés, au taux de 3%.
On note C_n le capital de René au 1° janvier de l'année 2002 + n.

a) Exprimer C_n en fonction de n.
b) Au bout de combien d'année le capital de René dépassera-t-il 7000 euros ?
c) A quel taux minimal aurait-il dû placer son capital pour disposer d'au moins 7000 euros le 01/01/2010 ?

Exercice 7

D'après une estimation optimiste faite à partir des données de l'ONU, on admet que le PIB des pays développés est actuellement 23 fois plus grand que celui des pays en voie de développement.

Si l'on considère que le taux de croissance annuel est de 2 % pour les pays développés, de 6 % pour les pays en voie de développement, et si l'on admet que cette situation va se prolonger, combien d'année faudra-t-il pour que le PIB des pays en voie de développement rattrape celui des pays développés ?

Indication : noter p le PIB des pays en voie de développement et exprimer en fonction de p et n le PIB des pays en voie de développement et celui des pays développés au bout de n années.