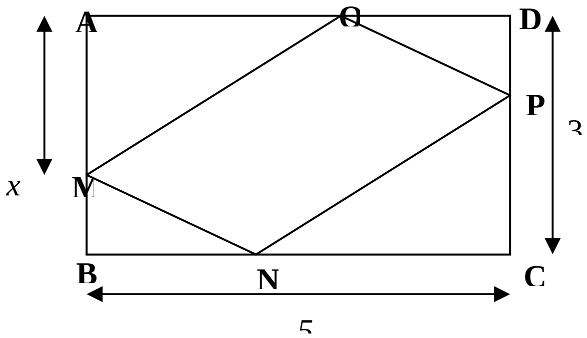
DEVOIR MAISON N°4 – Problème du second degré - CORRECTION

Vous vous attacherez à justifier clairement les résultats annoncés, ainsi qu'à rendre une copie soignée, présentée dans la norme habituelle des devoirs.

ABCD est un rectangle tel que AB = 3 cm et BC = 5 cm. On place sur les côtés les points M,N,P et Q comme sur la figure avec AM = BN = CP = DQ.

On note x la distance AM en cm et $S(x)$ l'aire de MNPQ en cm²



1. **Déterminer l'intervalle de définition de S** : la longueur AB = 3 cm, donc $x \in [0;3]$

2. **Exprimer $S(x)$ en fonction de x** : on calcule l'aire du parallélogramme MNPQ comme l'aire du rectangle ABCD diminuée des aires des triangles AMQ, MBN, NCP et PDQ.

Aire ABCD = 15 cm²

Aire AMQ = Aire PCN = $x \times (5-x) \div 2 = (-x^2+5x) \div 2$

Aire MBN = Aire PDQ = $x \times (3-x) \div 2 = (-x^2+3x) \div 2$

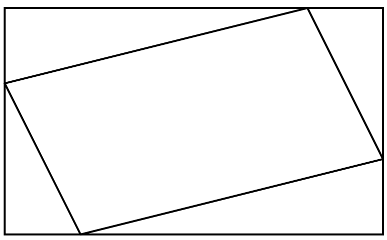
Ainsi Aire MNPQ = $S(x) = 15 - 2(-x^2+5x-x^2+3x) \div 2 = 2x^2-8x+15$

3. **Calculer les valeurs de x pour que l'aire de MNPQ soit égale à 9 cm². Représenter par deux dessins en vraie grandeur les deux configurations possibles.**

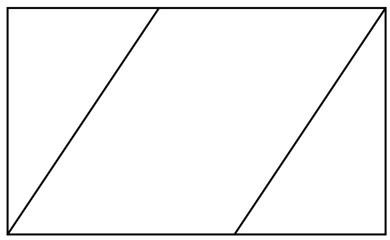
$S(x) = 9 \Leftrightarrow 2x^2-8x+15 = 9 \Leftrightarrow 2x^2-8x+6=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$

$\Delta = 16-4\times 3 = 4$ d'où les deux solutions $x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$

Cas où $x=1$

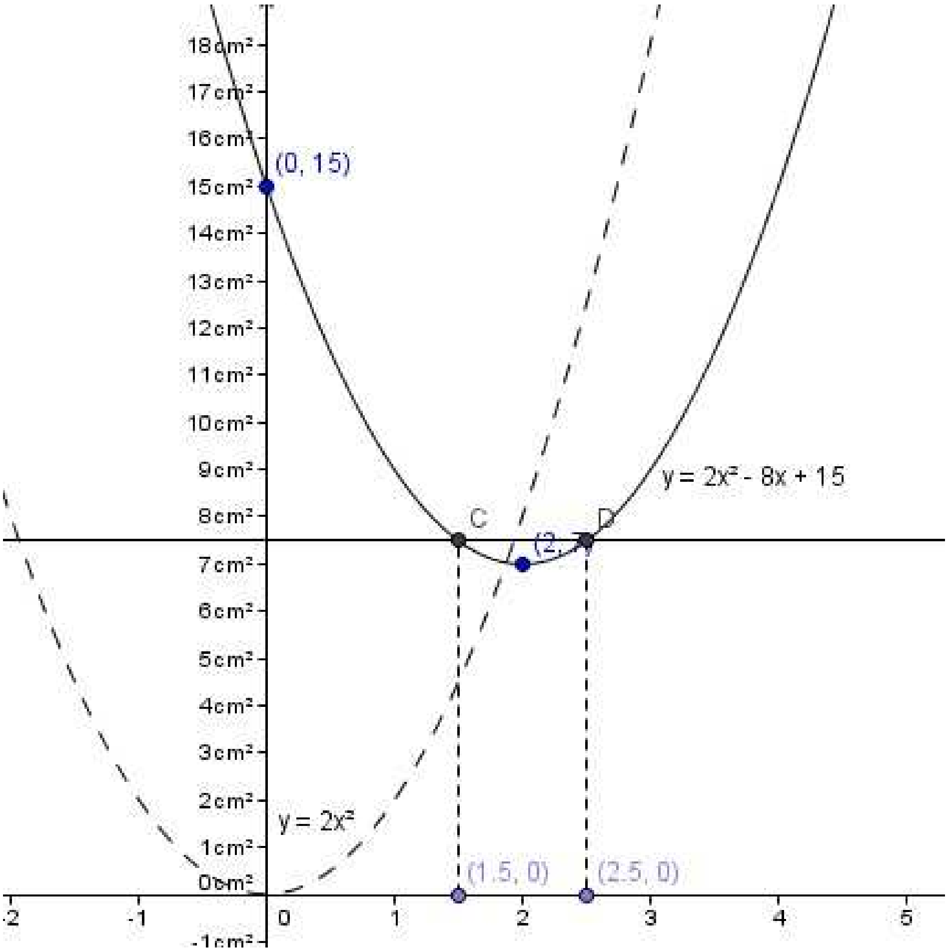


Cas où $x=3$



4. **Ecrire $S(x)$ sous sa forme canonique. En déduire la représentation graphique de S …**

Grace aux formules du cours, on obtient $S(x) = 2(x-\dfrac{8}{4})^2+7 = 2(x-2)^2+7$ comme forme canonique, ce qui signifie que la courbe de S est la translatée de celle de $y=2x^2$ par la translation de vecteur $2\vec{i}+7\vec{j}$



5. Déduire de la question précédente le tableau de variation de la fonction S sur son intervalle de définition uniquement.

	0		2		3
S(x)	15 cm²	↘	7 cm²	↗	9 cm²

6. Déterminer grâce à la question 4, les aires minimales et maximales de MNPQ en cm².

Le minimum de S sur [0 ;3] est atteint pour $x = 2$ et S(2) = 7 cm²

Le maximum de S sur [0,3] est atteint pour $x = 0$ et S(0) = 15 cm²

7. Montrer que l'aire T du trapèze MBCP est constante.

Aire MBCP = $\dfrac{(MB + CP)\times BC}{2} = \dfrac{(3 - x + x)\times 5}{2} = 7{,}5$ cm² constante

8. Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x l'aire de MNPQ est inférieure à celle du trapèze MBCP

On trace la droite $y = 7{,}5$ et on lit sur quel intervalle la courbe de S est strictement sous la droite …il s'agit de l'intervalle]1,5 ; 2,5[